Viðauki

Lausn heildisins

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\Theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\Theta)}} \tag{1}$$

Til að leysa heildið notum við innsetningu, veljum stærðina ϕ þannig að

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\Theta}{2}\cdot\sin\phi \tag{2}$$

Diffrun gefur jöfnuna

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sin\frac{\Theta}{2}\cdot\cos\phi d\phi$$

Í stað $\cos\frac{\theta}{2}$ ritum við

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\Theta}{2}\cdot\sin^2\phi}$$

svo þá fæst

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\Theta}{2}\cdot\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\Theta}{2}\cdot\sin^2\phi}}$$

Nú er $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ og því má umrita hluta nefnarans í jöfnu (1) svo

$$\cos\theta - \cos\Theta = 2\left(\sin^2\frac{\Theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

og með jöfnu (2) ásamt umritun fæst

$$\cos\theta - \cos\Theta = 2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cdot\cos^2\phi$$

Mörk heildisins í jöfnu (1) breytast við innsetningu (2), $\theta = 0$ samsvarar $\phi = 0$, og $\theta = \Theta$ samsvarar $\phi = \pi/2$. Stingum öllu inn í jöfnu (1) og fáum sveiflutímann

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\Theta}{2}\cdot\sin^2\phi}}$$

Þetta heildi, sem er vel þekkt og óreiknanlegt nema með nálgunum, er kallað elliptískt heildi af gerð eitt (e. *elliptic integral of the first kind*) og þar sem mörk þess eru frá 0 til $\pi/2$ er sagt að það sé fullkomnað (e. *complete*).
Nálgunarlausnir fyrir heildið má leiða út eða finna í flestum handbókum um eðlis- og stærðfræði, hér er ein slík með $k = \sin(\Theta/2)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right]$$

Notum skilgreiningu á T_0 úr (3) úr pendúlmælingu og fáum lausn fyrir T sem samsvarar jöfnu (5) í pendúlmælingum.

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \dots\right)$$